ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ И УПРАВЛЕНИЯ
Нелинейные динамические системы

Вып. 51 Межвузовский сборник научных трудов 2019

УДК 629:531|

Е.Н. Остапенко, Н.А. Репьях

Пермский государственный национальный исследовательский университет

Россия, 614990, г. Пермь, ул. Букирева, 15
mpu@psu.ru; (342) 2 396-309

КИНЕМАТИКА ПРОСТРАНСТВЕННОГО ДВИЖЕНИЯ ГАНТЕЛЕОБРАЗНОГО ТЕЛА В НЕЦЕНТРАЛЬНОЙ ОРБИТАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

Исследуются особенности кинематики пространственного движения больших орбитальных космических систем (БОКС) в центральном гравитационном поле. Учет влияния угловых (вращательных) движений гантелеобразной системы на движение ее центра масс можно осуществить введением "нецентральной" орбитальной системы координат, которая представляет собой суперпозицию цилиндрической и орбитальной систем координат.

Ключевые слова: кинематика; пространственное движение; гравитационное поле; системы координат; большие орбитальные космические системы (БОКС).

В работе [6] отмечено, что при изучении движения больших орбитальных космических систем (БОКС) [2–5] следует иметь в виду некеплеровый характер движения центра масс БОКС, возможные отклонения его от фиксированной плоскости кеплеровой орбиты центра масс и зависимость этих отклонений от вращательных движений БОКС.

С целью учета влияния угловых (вращательных) движений гантелеобразной системы на движение ее центра масс вводится "нецентральная" орбитальная система координат $OAC\xi\eta\zeta$ (рис. 1), которая представляет собой суперпозицию цилиндрической и орбитальной систем координат. Ломаная $pOAC$ представляет оси цилиндрической системы координат: точка O – гравитационный центр; C – центр масс гантелеобразной системы; OA – центральная ось цилиндрической системы координат, плоскость AOp – неподвижная, ось Op – полярная ось кеплеровой орбиты, соответствующей начальному фазовому состоянию точки C.

В текущем положении точка C имеет цилиндрические координаты (r, h, θ), где $r = AC$ – расстояние центра масс БОКС до оси OA, $h = OA$ – отклонение центра масс от "нулевой" кеплеровой орбиты, θ – угол, отсчитываемый от неподвижной плоскости AOp до текущего положения вектора $\overrightarrow{AC}$ ($p' \| p$). Угол θ – аналог истинной аномалии кеплеровой траектории.

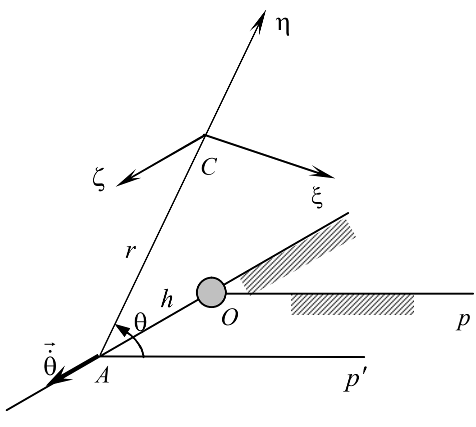

Рис. 1. "Нецентральная" орбитальная система координат

Угловые движения гантелеобразной БОКС определяются ориентацией осей связанной системы координат $Cxyz$ относительно осей "нецентральной" орбитальной системы $C\xi\eta\zeta$ (рис. 2), $C\zeta \| OA \| \bar{\dot{\theta}}$.

Предполагается, что БОКС представляет собой стержень, на концах которого расположены материальные точки B_1 и B_2, C – центр масс точек B_1 и B_2. Ось Cx направлена вдоль стержня $B_1 B_2$, ось Cy перпендикулярна плоскости "собственного" вращения стержня Cxz. Можно считать, что Cy – ось цилиндрического шарнира, вокруг которого вращается стержень $B_1 B_2$.

Ориентация осей связанной системы $Cxyz$ задается углами Эйлера–Крылова α, β, γ [1], где α и β – углы, определяющие ориентацию оси собственного вращения Cy относительно осей $C\xi$ и $C\eta$, φ – угол собственного вращения, отсчитывается от линии узлов CK (рис. 2).

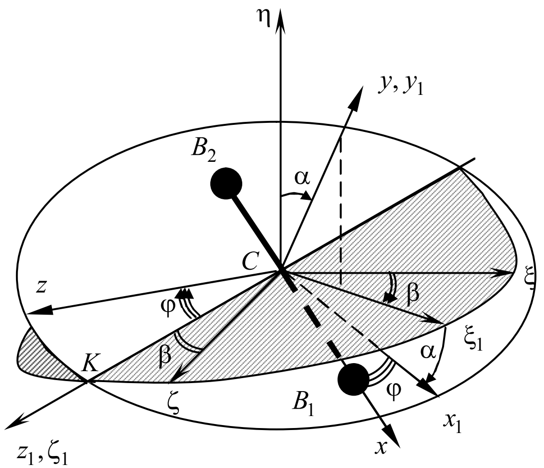

Рис. 2

Так введенные системы координат позволяют в динамике отслеживать отклонение h от плоскости опорной кеплеровой орбиты в зависимости от характеристик относительного движения точек БОКС.

Особенность кинематических и динамических характеристик определяется способом введения углов Эйлера–Крылова.

Переход от "нецентральной" орбитальной системы координат $C\xi\eta\zeta$ к подвижной системе координат $Cxyz$, связанной со стержнем B_1B_2, можно осуществить следующим линейным преобразованием с матрицей A

$$(x, y, z)^T = A \cdot (\xi, \eta, \zeta)^T, \; A = (a_{ij}). \tag{1}$$

Элементы матрицы A, выраженные через углы Эйлера–Крылова α, β, φ, имеют вид

$$\begin{cases} a_{11} = \cos\alpha\cos\beta\cos\varphi - \sin\beta\sin\varphi, \\ a_{12} = -\sin\alpha\cos\varphi, \\ a_{13} = \cos\alpha\sin\beta\cos\varphi + \cos\beta\sin\varphi, \\ a_{21} = \sin\alpha\cos\beta, \\ a_{22} = \cos\alpha, \\ a_{23} = \sin\alpha\sin\beta, \\ a_{31} = -\cos\alpha\cos\beta\sin\varphi - \sin\beta\cos\varphi, \\ a_{32} = \sin\alpha\sin\varphi, \\ a_{33} = -\cos\alpha\sin\beta\sin\varphi + \cos\beta\cos\varphi. \end{cases} \tag{2}$$

Обратное по отношению к (1) преобразование координат, т.е. переход от системы $Cxyz$ к цилиндрической орбитальной системе $C\xi\eta\zeta$, имеет вид

$$(\xi, \eta, \zeta)^T = A^{-1}(x, y, z)^T, \tag{3}$$

где $A^{-1} = A^T$ – матрица обратная для A.

В результате проекции вектора угловой скорости $\vec{\omega}$ вращающегося стержня B_1B_2 на оси связанной с точками B_1 и B_2 подвижной системы координат $Cxyz$ задаются уравнениями

$$\begin{cases} \omega_x = \omega_\xi a_{11} + \omega_\eta a_{12} + \omega_\zeta a_{13}, \\ \omega_y = \omega_\xi a_{21} + \omega_\eta a_{22} + \omega_\zeta a_{23}, \\ \omega_z = \omega_\xi a_{31} + \omega_\eta a_{32} + \omega_\zeta a_{33}, \end{cases} \tag{4}$$

где ω_ξ, ω_η, ω_ζ – проекции вектора $\vec{\omega}$ на оси "нецентральной" орбитальной системы координат, имеющие вид кинематических уравнений Эйлера:

$$\begin{cases} \omega_\xi = \dot{\alpha}\sin\beta - \dot{\varphi}\sin\alpha\cos\beta, \\ \omega_\eta = -\dot{\beta} - \dot{\varphi}\cos\alpha, \\ \omega_\zeta = -\dot{\alpha}\cos\beta - \dot{\varphi}\sin\alpha\sin\beta. \end{cases} \tag{5}$$

При малых углах Эйлера–Крылова α, β, φ матрица A выглядит следующим образом:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha & (\beta+\varphi) \\ \alpha & 1 & 0 \\ -(\beta+\varphi) & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Принимая во внимание величины до второго порядка малости, получим проекции вектора угловой скорости на оси $C\xi\eta\zeta$:

$$\begin{cases} \omega_\xi = \dot{\alpha}\beta - \dot{\varphi}\alpha, \\ \omega_\eta = -\dot{\beta} - \dot{\varphi}, \\ \omega_\zeta = -\dot{\alpha}, \end{cases} \tag{7}$$

на оси $Cxyz$:

$$\begin{cases} \omega_x = \alpha\dot{\beta} - \dot{\alpha}\varphi, \\ \omega_y = -\dot{\beta} - \dot{\varphi}, \\ \omega_z = -\dot{\alpha}. \end{cases} \tag{8}$$

Легко установить, что проекции вектора $\vec{\omega}$ (7) и (8) обладают тремя свойствами:

$$\begin{cases} \omega_\xi + \omega_x = \dfrac{d}{dt}\big(\alpha(\beta-\varphi)\big), \\ \omega_y = \omega_\eta, \\ \omega_z = \omega_\varsigma. \end{cases} \tag{9}$$

Так из первого свойства, при $\alpha = 0$ либо при $\beta(t) = \varphi(t)$, следует (при условии (6))

$$\omega_{\xi} = -\omega_{x}. \tag{10}$$

Свойства (9) и (10) могут быть полезны при решении некоторых навигационных задач. Линейные скорости точек B_1 и B_2 находятся далее по формулам:

$$\vec{\upsilon}_{B_k} = \vec{\upsilon}_C + \vec{\omega}_a \times \overrightarrow{CB}_k \quad (k = 1, 2), \tag{11}$$

$$\vec{\upsilon}_C = \{\upsilon_{C\xi}, \upsilon_{C\eta}, \upsilon_{C\varsigma}\} = \{-r\dot{\theta}, \dot{r}, \dot{h}\}, \tag{12}$$

$$\vec{\omega}_a = \vec{\omega}_r + \vec{\omega}_e, \tag{13}$$

где

$\vec{\omega}_a$ – абсолютная угловая скорость стержня B_1B_2,

$\vec{\omega}_r$ – относительная угловая скорость стержня B_1B_2,

$\vec{\omega}_e$ – переносная угловая скорость.

Проекции вектора $\vec{\omega}_r$ задаются формулами (4), (5), (7), (8). Вектор $\vec{\omega}_e$, как вектор угловой скорости вращения "нецентральной" системы координат $OAC\xi\eta\varsigma$ равен

$$\vec{\omega}_e = \{0, 0, \dot{\theta}\}^T. \tag{14}$$

Векторы $\overrightarrow{CB_1}$ и $\overrightarrow{CB_2}$ в связанной с телом B_1B_2 системе координат $Cxyz$ имеют проекции

$$\left(\overrightarrow{CB_1}\right)^* = \{l_1, 0, 0\}^T, \qquad \left(\overrightarrow{CB_2}\right)^* = \{-l_2, 0, 0\}^T \tag{15}$$

где l_1 и l_2 – расстояние точек B_1 и B_2 до центра масс стержня B_1B_2.

Векторы $\overrightarrow{CB_1}$ и $\overrightarrow{CB_2}$ в выражении (11) следует определять из следующих соотношений:

$$\overrightarrow{CB_k} = A^{-1} \cdot \left(\overrightarrow{CB_k}\right)^*, \qquad (k = 1, 2). \tag{16}$$

Полученные результаты можно использовать при изучении движения БОКС различной структуры, например, связки гантелеобразных тел с общим центром масс.

Библиографический список

1. *Вертипрахов И.А., Остапенко Е.Н., Репьях Н.А.* Динамика стрежневой большой орбитальной космической системы цепочечной структуры // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2012. Вып. 4(12). С. 42–47.

2. *Ишлинский А.Ю., Борзов В.И., Степаненко Н.П.* Лекции по теории гироскопов. М.: Изд-во МГУ, 1983.

3. *Курская К.Н., Краснянская О.А., Репьях Н.А.* Исследование орбитального движения одного вида осциллятора // Проблемы механики и управления. Нелинейные динамические системы: межвуз. сб. науч. тр. / Перм. ун-т. Пермь, 2007. Вып. 39. С. 46–57.

4. *Курская К.Н., Репьях Н.А.* О движении трехточечной стержневой системы // Проблемы механики и управления. Нелинейные динамические системы: межвуз. сб. науч. тр. / Перм. ун-т. Пермь, 2006. Вып. 38. С.8–13.

5. *Маланин В.В., Остапенко Е.Н., Репьях Н.А.* Свободное движение пятиточечной стержневой большой орбитальной космической системы цепочечной структуры в транспортирующей системе координат // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2013. Вып. 3(22). С. 59–62.

6. *Остапенко Е.Н., Репьях Н.А.* Кинематика пространственного движения вращающейся гантелеобразной системы в центральном гравитационном поле // Проблемы механики и управления. Нелинейные динамические системы: межвуз. сб. науч. тр. / Перм. ун-т. Пермь, 2013. Вып. 45. С. 76–81.